

**Univerzitet Crne Gore**  
**Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.  
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204

fax: +382 (0)20 245 204

[www.pmf.ac.me](http://www.pmf.ac.me)

Broj: 25/4

Datum: 12. 01. 2022

UNIVERZITET CRNE GORE

SENATU

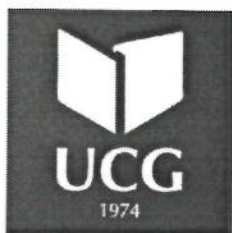
CENTAR ZA DOKTORSKE STUDIJE

U prilogu akta dostavljam Odluke sa LXXV sjednice Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta održane 24.12.2021. godine.



*ce* Dekan,

Prof. dr Predrag Miranović



**Univerzitet Crne Gore  
Prirodno-matematički fakultet**

Džordža Vašingtona b.b.  
1000 Podgorica, Crna Gora

tel: +382 (0)20 245 204

fax: +382 (0)20 245 204

[www.pmf.ac.me](http://www.pmf.ac.me)

Broj: 3041

Datum: 29.12.2021.

Na osnovu člana 64 Statuta Univerziteta Crne Gore, a u vezi sa članom 34 stav 1 Pravila doktorskih studija, Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta je na LXXV sjednici od 24.12.2021.godine uvrđilo

**PREDLOG ODLUKE**

**o imenovanju komisije za ocjenu prijave doktorske disertacije**

I

Imenuje se komisija za ocjenu prijave doktorske disertacije pod nazivom "Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru" kandidata Antona Đokaja u sljedećem sastavu:

1. Prof. dr Đorđije Vujadinović, vanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu (naučna oblast: Matematička analiza), član;
2. Prof. dr Marijan Marković, vanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu (naučna oblast: Matematička analiza), član;
3. Prof. dr David Kaljaj, redovni profesor PMFa (naučna oblast: Matematička analiza) mentor.

II

Zadatak komisije je da podnese Izvještaj o ocjeni prijave doktorske disertacije Vijeću fakulteta u roku od 10 dana od dana javnog izlaganja studenta. Ukoliko komisija u navedenom roku ne podnese Izvještaj, imenovaće se nova komisija.

  
DEKAN  
Prof. dr Predrag Miranović

## PRIJAVA TEME DOKTORSKE DISERTACIJE

OPŠTI PODACI O DOKTORANDU	
Titula, ime i prezime	MSc Anton Gjokaj
Fakultet	Prirodno-matematički fakultet
Studijski program	Matematika
Broj indeksa	2/19
Ime i prezime roditelja	Gjelosh Gjokaj
Datum i mjesto rođenja	13.6.1994. Podgorica, Crna Gora
Adresa prebivališta	Ul. 16, br. 33, Tuzi
Telefon	069292943
E-mail	antondj@ucg.ac.me; antongjpmf@gmail.com
BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA	
Obrazovanje	<ul style="list-style-type: none"> <li>o 1.10. 2017. – 19. 03. 2019. master studije Univerzitet Crne Gore, Prirodno–matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00</li> <li>o 1.10. 2016. – 9.7.2017. specijalističke studije Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00</li> <li>o 7. 9. 2013. – 9. 7. 2016. osnovne studije Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, prosječna ocjena: 10,00</li> <li>o 1. 9. 2009. – 20. 5. 2013. Gimnazija „25 maj“ Tuzi, prosječna ocjena: 5,00</li> </ul>
Radno iskustvo	o 1.11.2017 i dalje: Univerzitet Crne Gore, Prirodno-matematički fakultet, saradnik u nastavi
Popis radova	1. A. Gjokaj, D. Kalaj: Quasiconformal Harmonic Mappings Between the Unit Ball and a Spatial Domain with $C^{1,\alpha}$ Boundary, Potential Analysis (2021). <a href="https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y">https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y</a> .
NASLOV PREDLOŽENE TEME	
Na službenom jeziku	Granična svojstva kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja u prostoru
Na engleskom jeziku	Boundary behaviour of quasiconformal harmonic mappings in space
<b>Obrazloženje teme</b>	
<p>Kvazikonformna preslikavanja u ravni su nastala kao prirodno uopštenje pojma konformnih preslikavanja. Danas je ova oblast aktivno područje istraživanja i srijeće se u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, topologiji, dinamici i drugim oblastima. Finski matematičar O.Martio je prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Od tada problem Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja između oblasti u ravni sa unaprijed zadatim svojstvima izazvao je veliko interesovanje matematičara. Međutim, osjetno manje ima analognih rezultata u prostoru (u <math>R^n</math>, za <math>n \geq 3</math>), naročito zbog nedostatka tehnika iz kompleksne analize (svako harmonijsko preslikavanje u ravni se može napisati kao zbir analitičke i antianaliitičke funkcije). Zato, za rješavanje odgovarajućih problema u prostoru je neophodno da</p>	

se razvijaju nove pogodne tehnike. Sve to zajedno čini problem težim, ali tada eventualno rješavanje i odgovarajući pristup mogu biti korisni i za ostale probleme iz srodnih oblasti.

### Pregled istraživanja

Pojam kvazikonformnog preslikavanja u ravni je prvenstveno uveden u radovima matematičara H. Grötzscha i L. Ahlforsa u prvoj polovini XX vijeka. Veliki doprinos u razvoju ove oblasti u to vrijeme su dali i matematičari M.A. Lavrentjev, O. Teichmüller i B. Fuglede. Nagli razvoj ove teorije je omogućeno i dokazom ekvivalencije između geometrijske definicije, koja koristi modul krivih, i metričke definicije. Kako se navedene definicije mogu prirodno uopštiti i u prostoru, u prilogu povećanom interesovanju za ovu teoriju je išla i klasična teorema Liouvillea: Konformno preslikavanje definisano u nekoj oblasti u  $R^n$ , za  $n \geq 3$ , je restrikcija jedne Möbiusove transformacije. Möbiusovo preslikavanje je preslikavanje generisano sa translacijom, rotacijom, homotetijom i inverzijom na sferama. Ova trivijalnost familije konformnih preslikavanja u prostoru je predstavljala dodatni motiv da se matematičari ozbiljnije okrenu ka familiji kvazikonformnih preslikavanja.

Kako su konformna preslikavanja u ravni i harmonijska, finski matematičar Martio je u [19] prvi izučavao kvazikonformna harmonijska preslikavanja. Jedan od bitnijih rezultata za ovu klasu preslikavanja je rad Pavlovića [24], gdje je dokazano da kvazikonformno harmonijsko preslikavanje u ravni iz jediničkog diska na sebe je bi-Lipschitz neprekidno. Od tada, u ravni, su ostvareni značajni rezultati u vezi sa problemom Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja. To podrazumijeva različite uslove na domenu, i naročito na kodomenu preslikavanja. Kalaj kroz radove [12] i [13] dokazuje Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja između oblasti sa  $C^{1,\alpha}$  granicom, čime se uopštava rezultat iz [24]. U [14] je dokazana  $\alpha$ -Hölder neprekidnost kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja  $f$  između oblasti sa  $C^1$  granicom, za svako  $\alpha < 1$ , ali tako da Hölder koeficijent ne zavisi od preslikavanja  $f$ , već samo od  $\alpha$ , nekih određenih osobina kodomena  $\Omega$  i vrijednosti  $f(0)$ . Ovaj rezultat predstavlja uopštenje dobijenih rezultata u radu [26] za konformna preslikavanja. Dalje, u radu [17] je, između ostalog, dokazana Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog preslikavanja  $f$  iz jediničkog diska  $D$  u  $C^2$  Žordanovu oblast, pod uslovom da je  $\Delta f \in L^p(D)$ , za  $p > 2$ . Drugi interesantni rezultati u ravni se mogu naći u radovima [5], [16], [18], [22].

U prostoru, kao što je već naglašeno ima manje rezultata. U radu [3] autori dokazuju Lipschitz neprekidnost kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte na sebe, što parcijalno generalizuje pomenuti rezultat Pavlovića u [24]. U [11] autor dokazuje da je kvazikonformno preslikavanje jedinične lopte u oblasti sa  $C^2$  granicom, koje zadovoljava Poasonovu diferencijalnu nejednačinu, Lipschitz neprekidno. U prostoru možemo izdvojiti i radove [2], [15], [20].

### Cilji i hipoteze

Glavni ciljevi disertacije su:

- 1) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom.
- 2) Ispitivanje Hölder neprekidnosti kvazikonformnog harmonijskog preslikavanja iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^1$  granicom.
- 3) Ispitivanje Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnog preslikavanja  $f$  koje

zadovoljava uslov  $\Delta f = g$ , gdje je  $g \in L^p$ , za  $p > n$ , iz jedinične lopte u  $R^n$  na prostornu oblast  $\Omega$  sa  $C^{1,\alpha}$  granicom.

Napomena: Rezultat 1) je već ostvaren kroz autorski rad [9] i dat je potvrđan odgovor.

**Materijali, metode i plan istraživanja**

Po geometrijskoj definiciji sa pojmom kvazikonformnog preslikavanja se podrazumijeva homeomorfizam  $f : U \rightarrow V$  ( $U$  i  $V$  su oblasti u  $R^n$ ) koji čuva orijentaciju i koji ostavlja kvaziinvarijantnim modul svake familije krivih iz  $G$ , tj. postoji konstanta  $K \geq 1$  td.

$$\frac{1}{K} M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq KM(\Gamma),$$

za svaku familiju krivih  $\Gamma$  iz  $G$ . Napominjemo da je modul krivih invarijanta za konformna preslikavanja, što gorenavedenu definiciju čini prirodnom. Ispostavlja se da kvazikonformna preslikavanja možemo definisati i preko metričke definicije koja se zasniva na ograničenost dilatacije, čime se pokazuje da kvazikonformnost je lokalno svojstvo. U našim istraživanjima  $f : U \rightarrow V$  je kvazikonformno preslikavanje ako je homeomorfizam koji je apsolutno neprekidan na linijama, i za koji postoji  $K \geq 1$  tako da je

$$|f'(x)| \leq Kl(f'(x)), \text{ za } x \in U,$$

gdje je  $|f'(x)| = \sup_{|h|=1} |f'(x)h|$  norma preslikavanja  $f'(x)$ , a  $l(f'(x)) = \inf_{|h|=1} |f'(x)h|$ .

Sve ove definicije su ekvivalentne [1,25].

Od velikog značaja za dokaz naših hipoteza i postavljenih problema jeste i jedna generalizacija dobro poznate Hardy-Littlewood teoreme [10] u prostoru. Rezultat je objavljen u radu [9]. Ovim teoremom, za harmonijsku funkciju  $u: B \subset R^n \rightarrow R$ , i  $\eta \in S = \partial B$ , se daje veza između  $\mu$ -Hölder koeficijenta ( $\mu < 1$ ) u odnosu na tačku  $\eta$ , tj.

$$X = \sup_{\xi \in S, \xi \neq \eta} \frac{|u(\eta) - u(\xi)|}{|\eta - \xi|^\mu}$$

i vrijednosti

$$Y = \sup_{x \in [0, \eta)} (1 - |x|)^{1-\mu} |\nabla u(x)|,$$

kroz sljedeću nejednakost:

$$\frac{1}{C} X \leq Y \leq CX,$$

gdje konstanta  $C$  zavisi samo od  $\mu$ . Dokaz smo izveli primijenom Poasonovog integrala. Naime, svaka funkcija  $u: \bar{B} \subset R^n \rightarrow R$ , gdje je  $u$  harmonijska u jediničnoj lopti  $B$ , a neprekidna u  $\bar{B} = B \cup S$ , se može zapisati u sljedećem obliku

$$u(x) = \int_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

gdje je  $\sigma$  normalizovana površinska mjera na  $S$ .

Osim navedene generalizacije Hardy-Littlewood teoreme, u [9] smo dokazali i odgovarajuću verziju teoreme u slučaju da je  $\mu > 1$ . Ako za fiksirano  $\eta \in S$ , imamo nejednakost

$$|u(\eta) - u(\xi)| \leq M|\eta - \xi|^\mu, \text{ za } \xi \in S,$$

onda je  $|\nabla u(x)| \leq C$ , za  $x$  iz duži  $[0, \eta)$ , gdje je  $C$  konstanta koja zavisi samo od  $\mu$  i  $M$ .

Kada je u pitanju Hölder neprekidnost kvazikonformnih preslikavanja iz jedinične lopte u

jediničnu loptu, onda neizostavan je rezultat teoreme Mori u prostoru [8]:  $K$  kvazikonformno surjektivno preslikavanje  $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B$ ,  $f(0) = 0$ , je  $\alpha$ -Hölder neprekidno, gdje je  $\alpha = K^{\frac{1}{1-n}}$ , sa Hölder koeficijentom koji zavisi samo od  $K$ .

Za dokaz rezultata 1) korišćena je tehnika koja omogućava sukcesivno poboljšanja Hölder neprekidnosti u jediničnoj lopti  $B$ , imajući kao bazni slučaj  $\beta$ -Hölder neprekidnost koju smo dobili primijenom Morijeve teoreme. Koristeći uslov  $C^{1,\alpha}$  granice kodomena, možemo da granicu kodomena lokalno predstavimo kao grafik  $C^{1,\alpha}$  funkcije. To omogućava da u odnosu na jednu fiksiranu tačku  $n$ -ta koordinata funkcije  $f$  bude  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidna u  $S$ , što na osnovu naše Hardy-Littlewood teoreme daje ograničenost vrijednosti  $Y$ . Koristeći kvazikonformnost preslikavanja  $f$  možemo tu nejednakost dobiti i za ostale koordinate funkcije  $f$ , a koristeći pogodne izometrije nejednakost se prenosi i na sve ostale tačke iz jedinične lopte. U ovom momentu, naša Hardy-Littlewood teorema nam daje  $(1 + \alpha)\beta$ -Hölder neprekidnost našeg preslikavanja u čitavoj lopti (krenuli smo iz  $\beta$ -Hölder neprekidnosti). Sukcesivnom primijenom ovog postupka, zaključujemo da je  $f$   $\mu$ -Hölder neprekidno za sve  $\mu \in (0,1)$ . Prelazak iz Hölder neprekidnosti u Lipschitz neprekidnost je ostvareno na analogan način kao za preostale iteracije, osim što smo koristili verziju Hardy-Littlewood teoreme za slučaj  $\mu > 1$ .

Što se tiče hipoteze/problema 2) naš cilj je da parcijalno generalizujemo navedene rezultat u [14] i [26] iz ravni u prostoru. Dodatna pretpostavka, u odnosu na te radove, je  $\beta$ -Hölder neprekidnost preslikavanja  $f$ , za neko  $\beta \in (0,1)$ . Ideja se zasniva na posmatranje  $n$ -te koordinate funkcije  $f$ . Zbog uslova  $\beta$ -Hölder neprekidnosti ispostavlja se da funkcija

$$(1 - |x|)^{1-\alpha} |f'_n(x)|$$

uzima vrijednost nula na sferi  $S$ , pa se odgovarajući supremum dostiže u unutrašnjosti lopte  $B$ . To, na osnovu pomenutog uopštenja Hardy-Littlewood teoreme, povlači  $\alpha$ -Hölder neprekidnost preslikavanja  $f_n$ , sa Hölder koeficijentom koji zavisi od navedenog supremuma. Odgovarajuće nejednakosti se prenose i na ostale koordinatne funkcije koristeći kvazikonformnost preslikavanja  $f$ . Očekuje se da, zbog kompaktnosti granice i kvazikonformnosti preslikavanja  $f$ , navedeni supremum može biti kontrolisan nezavisno od tačke iz lopte gdje se dostiže taj supremum/maksimum i nezavisno od preslikavanja  $f$ .

Za hipotezu/problem 3) uslov  $\Delta f = g$ , gdje je  $g \in L^p$ , ćemo koristiti za reprezentaciju funkcije  $f$  preko Poasonovog jezgra i odgovarajuće Grinove funkcije. Očekujemo da dio koji je povezan sa Grinovom funkcije možemo "kontrolisati" i tako uopštiti rezultat iz [9], i generalizovati i uopštiti pomenuti rezultat iz [17], gdje je uzet jači uslov ( $C^2$  uslov na granici kodomena).

#### Očekivani naučni doprinos

Kao što je naglašeno, ispitivanje Hölder i Lipschitz neprekidnosti kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja je tema koja je imala dosta pažnje u slučaj ravni, međutim u prostoru je nedovoljno istražena. Dokaz pojedinih tvrđenja i u prostoru bi omogućilo ne samo generalizaciju rezultata iz ravni, već u nekim slučajevima i uopštenje i poboljšanje već postignutih rezultata. Kroz nove razvijene tehnike u prostoru odgovarajući pristup može biti koristan i za ostale slične probleme. Sa druge strane, u pojedinim situacijama možemo ukazati i na suštinske razlike koje donosi prelaz iz ravni u prostor, zbog kojih se neka tvrđenja ne mogu generalizovati.

## Spisak objavljenih radova kandidata

1. A. Gjakaj, D. Kalaj: Quasiconformal Harmonic Mappings Between the Unit Ball and a Spatial Domain with  $C^{1,\alpha}$  Boundary. Potential Analysis (2021).  
<https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y>.



## Popis literature

1. L. Ahlfors: Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrand, Princeton (1996).
2. M. Arsenović, V. Božin, V. Manojlović: Moduli of continuity of harmonic quasiregular mappings in  $B^n$ , Potential analysis vol 34 (2011) 283-291.
3. K. Astala, V. Manojlović: On Pavlovic theorem in space, Potential Anal. 43, No.3, 2015, 361-370.
4. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey: Harmonic function theory, Springer-Verlag New York (2000).
5. V. Božin, M. Mateljević: Quasiconformal and HQC mappings between Lyapunov Jordan domains, pp. 23 Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) DOI Number: 10.2422/2036-2145.201708 013.
6. K. M. Dyakonov: Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions. Acta Math. 178, 1997, 143167.
7. P. Duren: Harmonic mappings in the plane, Cambridge University Press, 2004.
8. R. Fehlmann, M. Vuorinen: Mori's theorem for  $n$ -dimensional quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 13 (1988), no. 1, 111-124.
9. A. Gjakaj, D. Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between the unit ball and a spatial domain with  $C^{1,\alpha}$  boundary, Potential Analysis, 2021, DOI <https://doi.org/10.1007/s11118-021-09919-y>.
10. G.M. Goluzin: Geometric function theory of a complex variable, Transl. Of Math. Monographs 26. – Providence: AMS, 1969.
11. D. Kalaj: A priori estimate of gradient of a solution to certain differential inequality and quasiconformal mappings, Journal d'Analyse Math. Volume 119, 2013, pp 63-88.
12. D. Kalaj: Quasiconformal mappings between Jordan domains, Math. Z. 260, No.2, 237-252, 2008.
13. D. Kalaj: Lipschitz spaces and harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 34, 475-485 (2009).
14. D. Kalaj: Harmonic quasiconformal mappings between  $C^1$  smooth Jordan domains, Revista Iberoamericana, DOI 10.4171/RMI/1272.
15. D. Kalaj: On harmonic quasiconformal self-mappings of the unit ball, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33 (2008), no. 1, 261-271. MR2386850 (2008m:30024).
16. D. Kalaj and M. Pavlović: On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poisson's equation, Transactions of the American Mathematical Society 363(08):4043-4061 (2011).
17. D. Kalaj, E. Saksman: Quasiconformal maps with controlled Laplacian, Journal d'Analyse Mathématique (2018). DOI:10.1007/s11854-018-0072-5
18. V. Manojlović: Bi-Lipschicity of quasiconformal harmonic mappings in the plane, Filomat 23, No. 1, 85-89 (2009).
19. O. Martio: On harmonic quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I 425 (1968), 3-10.

20. O. Martio, R. Näkki: Hölder continuity and quasiconformal mappings, J. London Math. Soc. (2), 44, no.2, 1991, 339-350.
21. J.C.C. Nitsche: The boundary behaviour of minimal surfaces. Kellog's theorem and branch points on the boundary, Invent. Math. 8, 313-333 (1969).
22. D. Partyka, K. Sakan: On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 32 (2007), no. 2, 579–594. MR2337496 (2008m:30021).
23. M. Pavlović: Lipschitz conditions on the modulus of a harmonic function, Rev. Mat. Iberoam. 23 (2007), no. 3, 831-845.
24. M. Pavlović: Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disc, An. Acad. Sci. Fenn., 27, 365-372 (2002).
25. J. Väisälä: Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings, Lecture notes Math. , 229, Springer-Verlag Berlin- New York, 1971.
26. S. Warschawski: On conformal mapping of regions bounded by smooth curves, Proc. Am. Math. Soc. 2, 1951, 254-261.

**SAGLASNOST PREDLOŽENOG/IH MENTORA I DOKTORANDA SA PRIJAVOM**

Odgovorno potvrđujem da sam saglasan sa temom koja se prijavljuje.

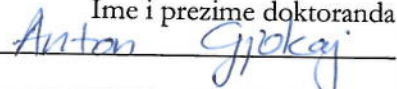
Prvi mentor	Prof. dr David Kalaj	
Drugi mentor		
Doktorand	MSc Anton Gjokaj	

**IZJAVA**

Odgovorno izjavljujem da doktorsku disertaciju sa istom temom nisam prijavio/la ni na jednom drugom fakultetu.

U Podgorici,  
21.12.2021. god.

Ime i prezime doktoranda





Na osnovu člana 33 Zakona o upravnom postupku ("Službeni list CG", br. 56/14, 20/15, 40/16 i 37/17), člana 115 Zakona o visokom obrazovanju ("Službeni list CG", br. 44/14, 52/14, 47/15, 40/16, 42/17, 71/17, 55/18, 3/19, 17/19, 47/19, 72/19, 74/20 104/21) i službene evidencije, a po zahtjevu studenta Gjokaj Đeljoš Anton, izdaje se

## UVJERENJE O POLOŽENIM ISPITIMA

Student **Gjokaj Đeljoš Anton**, rođen **13-06-1994** godine u mjestu **Podgorica**, opština **Podgorica**, Republika **Crna Gora**, upisan je studijske **2019/2020** godine, u **I** godinu studija, kao student koji se **samofinansira na doktorske akademske studije**, studijski program **MATEMATIKA**, koji realizuje **PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET - Podgorica** Univerziteta Crne Gore u trajanju od **3 (tri)** godine sa obimom **180** ECTS kredita.

Student je položio ispite iz sljedećih predmeta:

Redni broj	Semestar	Naziv predmeta	Ocjena	Uspjeh	Broj ECTS kredita
1.	1	ALGEBRA I TOPOLOGIJA-DOKTORSKI ISPIT	"A"	(odličan)	10.00
2.	1	ANALIZA-DOKTORSKI ISPIT	"A"	(odličan)	10.00
3.	1	ELIPTIČKE PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	"A"	(odličan)	10.00
4.	1	KVAZIKONFORMNA PRESLIKAVANJA	"A"	(odličan)	5.00
5.	1	PROSTORI DIŠTRIBUCIJA	"A"	(odličan)	5.00

Zaključno sa rednim brojem **5**.

Ostvareni uspjeh u toku dosadašnjih studija je:

- srednja ocjena položenih ispita "A" (**10.00**)
- ukupan broj osvojenih ECTS kredita **40.00** ili **66.67%**
- indeks uspjeha **6.67**.

*Uvjerenje se izdaje na osnovu službene evidencije, a u svrhu ostvarivanja prava na: (dječji dodatak, porodičnu penziju, invalidski dodatak, zdravstvenu legitimaciju, povlašćenu vožnju za gradski saobraćaj, studentski dom, studentski kredit, stipendiju, regulisanje vojne obaveze i slično).*

Broj:  
Podgorica, 13.01.2022 godine



SEKRETAR,  
*[Signature]*



Univerzitet Crne Gore

Univerzitet Crne Gore  
Bulevar Oslobođenja 15  
81000 Podgorica

University of Montenegro

Broj: 03-530

Datum: 07.04.2021

736  
14.04.2021

Na osnovu člana 72 stav 2 Zakona o visokom obrazovanju („Službeni list Crne Gore“ br 44/14, 47/15, 40/16, 42/17, 71/17, 55/18, 3/19, 17/19, 47/19, 72/19 i 74/20) i člana 32 stav 1 tačka 9 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 07.04.2021. godine, donio je

## ODLUKU O IZBORU U ZVANJE

Dr Đorđije Vujadinović bira se u akademsko zvanje vanredni profesor Univerziteta Crne Gore za **oblast Matematika**, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, na period od pet godina.

SENAT UNIVERZITETA CRNE GORE  
PREDSJEDNIK

Prof. dr Vladimir Božović, vršilac funkcije rektora

## BIOGRAFIJA

### OSNOVNI LIČNI PODACI

Đorđije Vujadinović je rođen 1985. u Pljevljima. Osnovnu školu je završio u Ulcinju i Podgorici, a gimnaziju "Slobodan Škerović" u Podgorici. Osnovne studije iz oblasti matematike završio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici, 2004. godine. Poslijediplomske studije iz oblasti Matematičke analize je završio na istom fakultetu, gdje je i odbranio magistarsku tezu pod nazivom "Integracija na apstraktnim prostorima i maksimalna funkcija" aprila 2010. godine.

Doktorske studije iz oblasti Matematičke analize je započeo 2009. godine na Matematičkom fakultet u Beogradu, Univerzitet u Beogradu. Doktorsku disertaciju pod nazivom "Ocjene norme integralnih operatora na prostorima Besova i Bloha" odbranio je 21.11.2014.

U periodu od 01.12.2014. do 01.10.2015. boravi na departmanu za matematiku "Guido Castelnuovo" na fakultetu La Sapienza, Univerzitet u Rimu kao dobitnik stipendije Basileus scholarship-program razmjene studenata doktorskih studija. Na privatnom fakultetu Sabandži u Istanbulu boravi u kraćem periodu kao postdoktorski student tokom ljetnjeg semestra 2019.

### PODACI O RADNIM MJESTIMA I IZBORIMA U ZVANJE

Đorđije Vujadinović je kao saradnik u nastavi bio u radnom odnosu na Univerzitetu Crne Gore od 2008. do 2015. godine, kada odlazi na studijski boravak u Rimu.

Početkom februara 2016. je izabran u zvanje docenta na Univerzitetu Crne Gore.

Odlukom Senata Univerziteta Crne Gore 08.04.2021. godine Đorđije Vujadinović izabran je u zvanje vandretnog profesora na Prirodno-matematičkom fakultetu u Podgorici.

### Bibliografija

1. Dj. Vujadinović, *Some Estimates for the Norm of the Bergman Projection on Besov Spaces*, Integral Equations and Operator Theory, 76 (2013), 213-224.
2. D. Kalaj, Dj. Vujadinović: *Adjoint operator of Bergman Projection and Besov space  $B1$* , Mathematical Reports (ISSN:1582-3067), Volume 15, Issue 04, Dec. 2013, Page(s) [12185].
3. D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space*, Journal of Operator theory, Volume 73, Issue 1, Winter 2015 pp. 113-126.
4. D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Solution operator of inhomogeneous Dirichlet problem in the unit ball*, Proceedings of American math society, 144, No. 2, 623-635 (2016).
5. Dj. Vujadinović, *On some class of integral operators related to the Bergman projection*, Publications de l'institut Mathématique 2 Nouvelle serie, tome 98(112) (2015).
6. M. Grossi, Dj. Vujadinović, *On the Green function of the annulus*, Analysis in Theory and Applications, Analysis in Theory and Applications, No. 1, 32 (2016).

7. Dj. Vujadinović, *Spectral estimates of Cauchy's operator on Bergman space of harmonic functions*, Journal of Mathematical Analysis & Applications. May 2016, Vol. 437 Issue 2, p 902-911. 10p.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.01.011>
8. D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Gradient of solution of the Poisson equation in the unit ball and related operators*, Canadian Mathematical Bulletin, Volume 60, Issue 3, 01 September 2017, pp. 536 - 545 doi:  
<https://doi.org/10.4153/CMB-2017-020-7>
9. Dj. Vujadinović, *Spectral asymptotic of Cauchy's operator on harmonic Bergman space for a simply connected domain*, Complex Variables and Elliptic Equations, Volume 63, 2018 - Issue 6  
<http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2017.1340275>.
10. Dj. Vujadinović, *Two-sided norm estimate for the Bergman projection on the Besov space in the unit ball in*, Publications Mathematicae Debrecen, 2018 / 93 / 3-4 (1).
11. Dj. Vujadinović, *The Harmonic Dirichlet-Besov Space and the Optimal Norm for the Bergman Projection*, Complex Analysis and Operator Theory, April 2019, Volume 13, Issue 3, pp 901-914.
12. Dj. Vujadinović, *The exact spectral asymptotic of the Logarithmic potential type operator on harmonic Bergman space in the unit disc*, Filomat 33:6 (2019), 1701-1714, ISSN: 03545180, <https://doi.org/10.2298/FIL1906701V>
13. Dj. Vujadinović, *Atomic decomposition for the harmonic Fock spaces in the plane*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 483, Issue 1, 1 March 2020, 123603. ISSN: 0022-247X. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123603>
14. D. Mitrovic, Dj. Vujadinović, *The structure of A-free measures revisited*, Advances in Nonlinear Analysis Volume 10: Issue 1, Published online: 10 Jun 2020. ISSN: 2191-950X  
<https://doi.org/10.1515/anona-2020-0223>
15. F. Haslinger, D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Sharp Pointwise Estimates for Fock Spaces*, Computational Methods and Function Theory, Volume 21, pages 343-359 (2021), ISSN: 16179447,  
<https://doi.org/10.1007/s40315-020-00338-5>
16. M. Graf, M. Kunzinger, D. Mitrovic and Dj. Vujadinovic, *A vanishing dynamic capillarity limit equation with discontinuous flux*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 71, Article number: 201 (2020), <https://doi.org/10.1007/s00033-020-01432-3>
17. Dj. Vujadinović, *Carleson Measures for Harmonic Fock Spaces in the Plane*, Complex Analysis and Operator Theory, volume 15, Article number: 72 (2021), <https://doi.org/10.1007/s11785-021-01115-5>

18. Dj. Vujadinović, *The norm of the harmonic Bergman projection and Besov space*, to appear in *Mathematical reports* 2021.

19. Dj. Vujadinović, *Schatten class of Berezin transform on Fock spaces*, to appear in *Filomat* 2021/22.



**Univerzitet Crne Gore**

adresa / address: Cetinjska br. 2  
81000 Podgorica: Crna Gora  
telefon / phone: 00382 20 414 255  
fax: 00382 20 414 230  
mail: rektorat@ucg.ac.me  
web: www.ucg.ac.me

**University of Montenegro**

Broj / Ref: 03 - 1994

Datum / Date: 15.12 2021

Na osnovu člana 72 stav 2 Zakona o visokom obrazovanju („Službeni list Crne Gore“ br. 44/14, 52/14, 47/15, 40/16, 42/17, 71/17, 55/18, 3/19, 17/19, 47/19, 72/19, 74/20 i 104/21) i člana 32 stav 1 tačka 9 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore na sjednici održanoj 15.12.2021. godine, donio je

## **ODLUKU O IZBORU U ZVANJE**

**Dr Marijan Marković** bira se u akademsko zvanje vanredni profesor Univerziteta Crne Gore za **oblast Matematika** na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, na period od pet godina.

**SENAT UNIVERZITETA CRNE GORE  
PREDSJEDNIK**

  
**Prof. dr Vladimir Božović, rektor**

## BIOGRAFIJA I BIBLIOGRAFIJA – MARIJAN MARKOVIĆ

### Biografija

Marijan Marković je rođen 21. aprila 1982. g. u Kotoru. Završio je gimnaziju *Slobodan Škerović* u Podgorici 2001. g. Potom je 2005. g. diplomirao na Prirodno-matematičkom fakultetu UCG.

Na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu je 2. oktobra 2012. g. odbranio magistarski rad pod nazivom *Varijante Karlemanove nejednakosti*. Na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu je 11. juna 2013. g. odbranio doktorsku disertaciju koja nosi naziv *Izoperimetrijska nejednakost i prostori analitičkih funkcija*. Mentori za njenu izradu su bili profesori Miodrag Mateljević i David Kalaj. Disertacija istražuje povezanost izoperimetrijske nejednakosti sa analitičkim i harmonijskih preslikavanjima i njeni djelovi su objavljeni u sljedećim radovima: M. Marković, *A sharp inequality for holomorphic functions on the polydisc*, Proceedings of the American Mathematical Society **141** (2013), 1693–1704, D. Kalaj, M. Marković, M. Mateljević, *Caratheodory and Smirnov type theorems for harmonic mappings of the unit disk onto surfaces*, Annales Academiae scientiarum Fennicae, Mathematica **38** (2013), 565–580 i M. Marković, *Sharp inequalities over the unit polydisc*, Journal of Functional Analysis **268** (2015), 26472671.

Od decembra 2016. g. zaposlen je kao docent na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore. Angažovan je na Filozofskom fakultetu u Nikšiću na predmetima Matematika I, II i III na učiteljskom studiju, a na PMFu izvodi nastavu na predmetu Funkcionalna analiza. Prethodno je u periodu od 2005. do 2007. g. bio saradnik u nastavi na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta Crne Gore, a u periodu od 2007. do 2010. g. bio je zaposlen na nacionalnom projektu *Kompleksna analiza* na Prirodno-matematičkom fakultetu UCG. Bio je rukovodilac biletelnog projekta *Konformna i kvazikonformna analiza* sa Slovenijom u periodu od 2018. do 2020. g.

U skorijem vremenu imao je izlaganja na sljedećim konferencijama: M. Marković, *Equality of the Bloch and the Lipschitz norm of a mapping*, Treći centralno-evropski seminar za kompleksnu analizu, Krakov, 12–14 april 2019; M. Marković, *Nonvanishing of extremals in some extremal problems for analytic functions*, Drugi centralno-evropski seminar za kompleksnu analizu, Beč, 12–14 april 2018.

### Bibliografija (od 2015. godine)

- [1] P. Melentijević, M. Marković, *Best constants in inequalities involving analytic and co-analytic projections*, Potential Analysis, u štampi
- [2] M. Marković, *Hardy and Littlewood theorems and the Bergman distance*, Annales mathématiques du Québec, u štampi
- [3] M. Marković, *A criterion for normality of analytic mappings*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, u štampi
- [4] M. Marković, *On holomorphic functions on negatively curved manifolds*, Monatshefte für Mathematik **196** (2021), 851–860
- [5] A. Crnković, V. Jaćimović, M. Marković, *On synchronization in Kuramoto models on spheres*, Analysis and Mathematical Physics **11** (2021), article number: 129
- [6] M. Marković, *Representations for the Bloch type norm of Fréchet differentiable mappings*, Journal of Geometric Analysis, **31** (2021), 7947–7967
- [7] M. Marković, *Lipschitz constants for the real part and modulus of analytic mappings on a negatively curved surface*, Archiv der Mathematik **116** (2021), 61–66
- [8] M. Marković, *Riesz's Theorem for Lumer's Hardy Spaces*, The American Mathematical Monthly, **127** (2020), 452–455
- [9] M. Marković, *Solution to the Khavinson problem near the boundary of the unit ball*, Constructive Approximation **45** (2017), 243–271
- [10] M. Marković, *Sharp inequalities over the unit polydisc*, Journal of Functional Analysis **268** (2015), 2647–2671

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ

Ул. Цетинска бр. 2  
П. фах 99  
81000 ПОДГОРИЦА  
ЦРНА ГОРА  
Телефон: (020) 414-255  
Факс: (020) 414-230  
E-mail: rektor@ac.me



UNIVERSITY OF MONTENEGRO

Ul. Cetinjska br. 2  
P.O. BOX 99  
81 000 PODGORICA  
MONTENEGRO  
Phone: (+382) 20 414-255  
Fax: (+382) 20 414-230  
E-mail: rektor@ac.me

Број: 08-1905  
Датум, 25.10.2012 г.

УНИВЕРЗИТЕТ ЦРНЕ ГОРЕ  
Природно-математички факултет  
Број 2556  
Подгорца, 01. 11. 2012 год.

Ref: \_\_\_\_\_  
Date: \_\_\_\_\_

Na osnovu člana 75 stav 2 Zakona o visokom obrazovanju (Sl.list RCG, br. 60/03 i Sl.list CG, br. 45/10 i 47/11) i člana 18 stav 1 tačka 3 Statuta Univerziteta Crne Gore, Senat Univerziteta Crne Gore, na sjednici održanoj 25.10.2012. godine, donio je

## ODLUKU O IZBORU U ZVANJE

Dr DAVID KALAJ bira se u akademsko zvanje redovni profesor Univerziteta Crne Gore za predmete: Kompleksna analiza 2 (studijски програм Matematika), Analiza 3 (studijски програм Računarske nauke) i Analiza 3 (studijски програм Fizika) na Prirodno-matematičkom fakultetu.



REKTOR

*Predrag Miranović*  
Prof. dr Predrag Miranović



Biografija Dr. Davida Kulaj

Lični podaci

Ime i prezime: David Kulaj

Dat. rođenja: Crna Gora

Datum i mjesto rođenja: 11. 12. 1971, Podgorica

Institucija

Univerzitet Crne Gore,

- Prirodno-matematički fakultet, UCG

Zvanje: Redovni profesor

- Samostalni studijski program za obrazovanje učitelja na albanskom jeziku, UCG

Funkcija: rukovodilac

#### A) OBRAZOVANJE

1991: Maturirao Srednju školu „25. Maj“, Tuzi, Titograd, sa odličnim uspjehom.

1995: Diplomirao na Prirodno-Matematičkom Fakultetu, Univerziteta Crne Gore sa prosječnom ocjenom 9.52. (Za postignuti uspjeh tokom školovanja je 1995. godine dobio Studentsku nagradu 19. decembar (Nagrada opštine Podgorica))

1995: Magistrirao na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu, smjer matematička analiza, sa temom *Harmonijske funkcije i kvazikonformna preslikavanja*, pošto je položio sve predviđene ispite sa ocjenom 10.

2002: Odbranio doktorsku disertaciju pod nazivom: *Harmonijske funkcije i kvazikonformne harmonijske funkcije između konveksnih domena* na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu.

#### B) NASTAVNA ISKUSTVA

1995 – 1997 Saradnik u nastavi, Prirodno-Matematičkog fakulteta UCG

1998 – 2002 Asistent, Prirodno-Matematičkog fakulteta UCG

2002 – 2007 Docent, Prirodno-Matematičkog fakulteta UCG

Kompleksna Analiza, Matematička Analiza 3 (PMF), Matematike 1,2,3,4

(Studijski programi za obrazovanje učitelja na albanskom jeziku)

2007- 2012 Vanredni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta UCG

Kompleksna Analiza, Matematička Analiza 3 (PMF),

Matematike 1,2,3,4 (Studijski programi za obrazovanje učitelja na albanskom jeziku)

Realna i kompleksna analiza (kurs na posdiplomskim studijama PMF-a)

Viša analiza (kurs na doktorskim studijama PMF i Matematičkog fakulteta u

Beogradu)

2012 - Redovni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta UCG

- Kompleksna Analiza II, Matematička Analiza 3, Matematička analiza 1,2,3,4 (PMF),

- Matematike 1,2,3,4 (Studijski programi za obrazovanje učitelja na albanskom jeziku)

- Realna i kompleksna analiza (kurs na posdiplomskim studijama PMF)
- Viša analiza (kurs na doktorskim studijama PMF)
- Harmonijske funkcije, doktorski kurs, Prirodno-Matematički fakultet, Zagreb (2014)

Mentorstva na doktorskim disertacijama

2013. Marijan Marković (Beogradski univerzitet)

2014. Djordjije Vujađinović (Beogradski univerzitet)

Mentorstva na magistarskim tezama

2010. Djordjije Vujađinović (UGG)

### C) NAUČNO-STRAŽIVAČKI INTERESI

Geometrijska teorija funkcija: Harmonijske funkcije, Kvazikonformna preslikavanja, Holomorfe funkcije, Funkcionalni prostori: Hardyjevi i Bergmanovi prostori, Parcijalne diferencijalne jednačine: Poissonova, Laplaceova, Eliptičke PDE, Diferencijalna geometrija: Harmonijske površi, Minimalne površi, Izoperimetrija-nejednakost itd.

#### • Upravljanje projektima

1. Rukovodilac nacionalnog projekta Analiza na mnogostrukosti i primjene (2011-2015), koga finansiraju Ministarstvo nauke Republike Crne Gore. Projekat im čine renomirani matematičari iz Crne Gore. Pri tome je projekat pri evaluaciji osvojio maksimalan broj poena od strane međunarodnih eksperata. (Nagrada Ministarstva nauke za najbolji naučni projekat za 2013 godinu)

2. Trenutno je rukovodilac dva bilateralna projekta jednog sa Kinom i drugog sa Hrvatskom.

3. Bio je Rukovodilac uspješnog nacionalnog projekta Analiza na mnogostrukosti (2008-2011).

#### • Izvod iz bibliografije

Publikovani (ukupno 65 radova), između ostalog, u sledećim vrhunskim matematičkim časopisima: Advances in Mathematics, Transactions of American Mathematical Society, Calculus of Variations and PDE, International mathematics research notices, Proceedings of American Mathematical Society, Journal D'Analyse Math, Israel Journal of Math, Mathematische Zeitschrift, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa- Classe di Scienze, Annales Académiques Scientiarum Fennicae Mathematica, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Pacific Journal of Mathematics.  
 U pripremi ima još 6 radova koji se nalaze na arxiv.org serveru.

Ukupno broj radova publikovanih na žurnalima koji pripadaju SCI listi je 60. Sa ove radove je izložio na više od 25 naučnih konferencija i simpozija i to u sljedeće države: SAD, Rusija, Japan, Kina, Južna Koreja, Njemačka, Francuska, Finska, Rumunija, Srbija, Norveška, Češka, Poljska itd. Njegovi koautori su između ostalog: Noam Elkies, Eero Saksman, Matti Vuorinen, Miroslav Pavlović, Miodrag Mateljević koji su deli svojevrsan počat modernoj matematici. Kao dokaz ove teze je činjenica da je Noam Elkies svojevremeno postao najmladji profesor u historiji Harvard univerziteta ([http://en.wikipedia.org/wiki/Noam\\_Elkies](http://en.wikipedia.org/wiki/Noam_Elkies)), dok je Eero Saksman urednik Acta Mathematica, koji je najprestižniji svjetski matematički časopis. (<http://www.springer.com/mathematics/journal/11511?detailsPage=editorialBoard>) Kalajevi radovi su citirani više od 550 puta ([www.google.com](http://www.google.com)). (Spisak radova i konferencija su dati u prilogu).

#### D) Učbenici

1. D. Kalaj: Zbirka zadataka iz kompleksne analize, Univerzitet Crne Gore, 2006, 219 str.
2. M. Jačinović, D. Kalaj: Uvod u kompleksnu analizu, Univerzitet Crne Gore, 2009, 347 str.

#### Prevodi i adaptacija školskih učbenika

Prevod i adaptacija učbenika iz matematike za ukupno 8 razreda za osnovnu i srednju školu sa srpskog (crnogorskog) na albanski jezik u izdanju izdavačke kuće "Zavod za uzbenske i nastavna sredstva" u periodu 2008-2010 i 2014.

#### E) Uredništva

Urednik je sljedećih matematičkih časopisa:

1. World scientific journal  
(<http://www.hindawi.com/journals/psw/editors/mathematical-analysis/>)
2. Abstract and applied mathematics,  
<http://www.hindawi.com/journals/aaap/>
3. Bulletin of mathematical analysis and application,  
<http://91.187.98.171/bmathan/>
4. Albanian journal of mathematics

#### F) RECENZIJAE I EKSPERTIZE:

Recenzija radova za renomirane časopise:

Transaction of AMS, Indiana journal of mathematics, Proceeding of AMS, Annals of Academic Scientiarum Fennica Mathematica, Applied Mathematics Letters, Abstract and Applied Analysis, Applied Mathematics and Computation, Complex variables and Elliptic equations, Filomat, Publications d'Institut mathematique, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, Journal of mathematical analysis and application, Bulletin of mathematical analysis and application, Publicationes Mathematicae Debrecen, World scientific journal, Acta Mathematica

Sinica, Turkish Journal of math, Mathematica slovacca, Bulletin of London math society,  
Journal of Indian Academy of Mathematics etc.

Međunarodne ekspertize za projekte:

- - Evaluatork za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Israel science foundation države  
ISRAEL na period 2000-2016.
- - Evaluatork za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Israel science foundation države  
Israel na period 2012-2015.
- - Evaluatork za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Israel science foundation države  
Israel na period 2015-2018.
- - Evaluatork za projekte iz oblasti matematika koje je raspisalo Ministarstvo prosvjete i nauke  
Republike Srbije na period 2011-2014.
- - Evaluatork za projekte FONDECYT, Chile 2014.

# DAVID KALAJ – CURRICULUM VITAE

May 2015

UNIVERSITY OF MONTENEGRO, DEPARTMENT OF MATHEMATICS & DEPARTMENT  
OF EDUCATION OF TEACHERS IN ALBANIAN  
DZORDZA VASINOTOMA BR. 81000 PODGORICA, MONTENEGRO  
Tel. +381 (0)67 252 243  
e-mail: davidk@uc.me

## EDUCATION

- March 2002 University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
PhD in Mathematics. Thesis title: "Harmonic Mappings and Quasi-conformal Harmonic Mappings between Convex Domains".
1995. - 1998 University of Belgrade, Faculty of Mathematics  
M.Sc. Program. Thesis title: "Harmonic diffeomorphisms and quasiconformal mappings"  
GPA: 10.00/10.00
1991. - 1995 University of Montenegro, Faculty of Sciences  
B.Sc. in Mathematics  
GPA: 9.52/10.00

## FELLOWSHIPS AND AWARDS

- 1993 Annual Fellowship of the Ministry of Education of the Republic of Montenegro.
- 1994 "Decembaraska nagrada grada Podgorice" (the Award of the Municipality of Podgorica for distinctive results achieved as a student)
- 2012 The award for the best project funded by the Ministry of Science of Montenegro

## TEACHING EXPERIENCE

- 1995 - 1997 Teach. assistant, University of Montenegro, Faculty of Sciences  
Mathematical Analysis 2, undergraduate course  
Differential Calculus, undergraduate course
- 1998 - 2002 Teach. assistant, University of Montenegro, Faculty of Sciences  
Mathematical Analysis 2, undergraduate course  
Complex Analysis, undergraduate course
- 2002 - 2007 Assist. professor, University of Montenegro, Faculty of Sciences  
Complex Analysis, undergraduate course  
Mathematical Analysis 2, undergraduate course
- 2007 - 2012 Associate professor, University of Montenegro  
Complex Analysis, Mathematics 1, Mathematics 2.

Mathematics 1, Mathematics 4, (Study programme for secondary teachers in Albanian Language) undergraduate course.  
 Mathematical Analysis 3, undergraduate course.  
 Real and Complex Analysis, graduate course  
 Full professor, University of Montenegro

2012-

Mentorstva na doktorskim disertacijama

2013, Marijan Markovic (Beogradski univerzitet)  
 2014, Djordjije Vujadinovic (Beogradski univerzitet)

Mentorska na magistarskim tezama

2010, Djordjije Vujadinovic

**DODATNE INFORMACIJE**

Born December 11, 1971; Podgorica, Yugoslavia

Citizenship Montenegrin

Languages Albanian (native command), Serbian (native command), English (fluent), Russian (passive), Italian (passive).

Computer skills Latex, C++, Mathematica software

Projects: a) Establishment and management of Study programme for teacher education at Albanian since 2004.

b) PI of the national project Analysis on manifolds (2008-2011).

c) PI of the national project Analysis on manifolds and applications

(2012-2015)

**RADOVI**

1. D. Kalaj, *Univalent harmonic mappings between Jordan domains*, Publ. Inst. Math., Nov. Ser. 69(83), 108-112 (2003).
2. D. Kalaj, *On the Nitsche's conjecture for harmonic mappings* *Mathematica Montisnigri* Vol XIV (2003) 89-94.
3. D. Kalaj, *The Jacobian of harmonic function and of its boundary values*, *Revue Roumaine De Mathematiques Pures Et Appliquees* Tome XLVII, N 5-6, (2002).
4. D. Kalaj, *On harmonic diffeomorphisms of the unit disc onto a convex domain*, *Complex Var. Theory Appl.* 48: No.2, 175-187 (2003).
5. D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic functions between convex domains*, *Publ. Inst. Math., Nov. Ser.* 76(90), 3-20 (2004).
6. D. Kalaj, *On the Nitsche's conjecture for harmonic mappings in  $R^2$  and in  $R^d$* , *Publ. Inst. Math. (Beograd)* (N.S.) 75(89) (2004), 139-146.
7. D. Kalaj, M. Pavlovic, *Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of a half-plane* *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 30 (2005), no. 1, 159-166.
8. D. Kalaj, *On the Nitsche conjecture for harmonic mappings in  $R^2$  and in  $R^d$* , *Israel J. Math.* 150 (2005) 241-251.
9. D. Kalaj, M. Mardesic, *Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between convex domains*, *J. Anal. Math.* 100 (2006), 117-132.
10. Sh. Najafabadi, S. R. Khatami and D. Kalaj *Application of convolution and Schwarz's lemma to convex mappings on quasihyperbolic and p-valent functions*, *Filomat* 20:2 (2006), 113-124.
11. D. Kalaj, *On the geometric relation of  $W_{\infty}^2$  and  $W_{\infty}^1$  between equidistant arcs*, *J. Math. Anal. Appl.* Volume 327, Issue 1, Pages 1-11, (2007).
12. D. Kalaj, *On the geometric relation of  $W_{\infty}^2$  and  $W_{\infty}^1$  between equidistant arcs*, *J. Math. Anal. Appl.* Volume 327, Issue 2, Pages 252-268, (2007).

13. D. Kalaj, M. Mateljević, *Quasiconformal and harmonic mappings between Jordan domains*, Novi Sad J. of Mathematics, 38 (2) 2008, 147-156.
14. D. Kalaj, *On harmonic quasiconformal self-mappings of the unit ball*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., Vol. 33, 261-271, (2008).
15. D. Kalaj, *Lipschitz spaces and harmonic mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., Vol. 34, 2009, 475-485.
16. D. Kalaj, *On quasiregular mappings between smooth domains*, J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), 362, issue 1, Pages 58-65.
17. D. Kalaj, M. Mateljević, *Harmonic q.c. self-mapping and Möbius transformations of the unit ball  $S^n$* , Pacific J. Math. Vol. 247, No. 2, 2010, 389-406.
18. D. Kalaj, *On an integral inequality and application to Poisson equation*, Applied Mathematics Letters, 23 (2010), 1016-1020.
19. D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic mappings and close to convex domains*, Filomat, Volume 24, Number 1, April 2010, 63-68.
20. D. Kalaj, M. Mateljević, *On absolutely conformal mappings*, Publ. Math. Debrecen, 77(1-2) (2010), 33-38.
21. R. Meštrović, D. Kalaj, *A converse of Kinkojoki's type inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010 (2010), Article ID 461215, 9 pages doi:10.1155/2010/461215.
22. D. Kalaj, M. Mateljević, *Quasiconformal harmonic mappings and generalizations*, J. Analysis, Volume 18 (2010), 239-260.
23. D. Kalaj, M. Pavlović, *On quasiconformal self-mappings of the unit disk satisfying Poisson differential equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011) 4043-4061.
24. D. Kalaj, *Harmonic maps between almost un-Riemann surfaces*, Israel J. Math. 182 (2011), 123-147.
25. D. Kalaj, M. Mateljević, *On quasiconformal harmonic surfaces with rectifiable boundary*, Complex-Complex Anal. Oper. Theory 5, No. 3, 635-646 (2011).
26. D. Kalaj, M. Mateljević, *On certain nonlinear elliptic PDE and quasiconformal maps between Euclidean surfaces*, Potential Analysis, Volume 34, Number 1, 13-22, DOI: 10.1007/s11118-010-9177-x (10 pages).
27. D. Kalaj, *Harmonic mappings and distance function*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. X (2011), 669-681.
28. D. Kalaj, *Isoperimetric inequality for the polydisk*, Anali di matematica pura ed applicata, Volume 190 (2011), Number 2, 355-369.
29. D. Kalaj, *Estimates of gradient and of Jacobian of harmonic mappings defined in the unit disk*, Proc. Am. Math. Soc. 139, No. 7, 2463-2472 (2011).
30. D. Kalaj, *Invertible harmonic mappings beyond Riesz theorem and quasiconformal harmonic mappings*, Stud. Math. 207, No. 2, 117-136 (2011), arXiv:1002.2740.
31. D. Kalaj, R. Meštrović, *An isoperimetric type inequality for harmonic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 373, Issue 2, 15 January 2011, Pages 439-448.
32. D. Kalaj, *On the quasiconformal self-mappings of the unit ball satisfying the Poisson differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Volumen 36, 2011, 177-193.
33. D. Kalaj, M. Mateljević,  *$SFC, K^2$ -quasiconformal harmonic mappings*, Potential Anal. 36, No. 1, 117-133 (2012).
34. D. Kalaj, M. Mateljević, *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 161-165.
35. D. Kalaj, A. Bényi, V. Domokos, D. Kalaj, M. Vuorinen, *On the Schwarz lemma for the unit ball*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 387, Issue 1, 2012, Pages 708-731.
36. D. Kalaj, M. Mateljević, *On conformal, harmonic mappings and Dirichlet energy*, Filomat, Volume 25, Number 2, June 2011, 91-103.
37. D. Kalaj, *On boundary correspondences of harmonic mappings between domains*, Math. Nachr. 185, No. 3-3, 283-294 (2012).
38. D. Kalaj, R. Meštrović, *Optimal estimates for the harmonic functions on the unit disk*, J. Inequal. Appl. 2012, 771-782 (2012).

39. D. Kalaj, *Quasiconformal harmonic mappings between  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  and  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  surfaces*, *Mongolian Math.* 167, No. 2, 203-229 (2013).
40. D. Kalaj, V. Mateljević, *Subharmonicity of the modulus of quasiregular harmonic mappings*, *Journal of mathematical analysis and applications* Volume 379, Issue 2, 15, July 2011, Pages 783-787.
41. D. Kalaj, *On Kellogg's theorem for quasiconformal mappings*, *Glasg. Math. J.* 54, No. 3, 399-603 (2012).
42. D. Kalaj, *On some integrable operators related to Poisson equation*, *Integral Equations and Operator Theory* 72, No. 4, 563-575 (2012).
43. D. Kalaj, *Steepest angle limit of a certain class of selfmappings of the unit disk*, *J. Approx. Theory* 164, No. 6, 815-822 (2012).
44. D. Kalaj, *Clebsch transform and Poisson's equation*, *Advances in Mathematics* 251, No. 1, 213-242 (2012).
45. D. Kalaj, *On quasiconformal selfmappings of the unit disk and elliptic PDE in the plane*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A, Volume 143 / Issue 04 / August 2013 pp 831-849*.
46. D. Kalaj, M. Marković, *Optimal estimates for the gradient of harmonic functions in the unit disk*, *Complex Anal. Oper. Theory* 7, No. 4, 1167-1183 (2013).
47. D. Kalaj, *A priori estimate of gradient of a solution to certain differential inequality and quasiregular mappings*, *J. Anal. Math.* 119, 63-88 (2013).
48. D. Kalaj, S. Penningsamy, M. Vučković, *Radius of Close-to-convexity of  $\lambda$ -harmonic functions*, *Complex Var. Elliptic Equ.* 59, No. 4, 339-352 (2014).
49. D. Kalaj, M. Marković, M. Mateljević, *Carathéodory and Saito-type theorems for harmonic mappings of the unit disk onto surfaces*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 36, No. 2, 565-580 (2013).
50. D. Kalaj, *Gauss map of a harmonic surface*, *Indagationes Mathematicae* Volume 24, Issue 2, March 2013, Pages 415-427.
51. D. Kalaj, D. Vučković, *Bergman projection and Besov space  $S_{p, q}^s(\mathbb{D})$* , *Mathematical reports, the 4<sup>th</sup> Issue of 2013*.
52. David Kalaj, Marijan Mateljević, *Norm of the bergman projection*, *Mathematical Reports, vol. 15, no. 4, pp. 527-528, 2013*.
53. D. Kalaj, N. Eklund, *On real part theorem for the derivatives of analytic functions in the unit disk*, *Comput. Methods Funct. Theory* 13, No. 2, 189-203 (2013).
54. D. Kalaj, M. Marković, *Norm of Bergman projection*, *Math. Scand.* 115, No. 1, 143-160 (2014).
55. D. Kalaj, *Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces*, *Calculus Variations Partial Differ. Equ.* 51, No. 1-2, 463-494 (2014).
56. D. Kalaj, S. Penningsamy, *Polyharmonic mappings and J. C. C. Nitsche type conjecture*, *Glas. Mat.* III, Ser. 49, No. 1, 163-178 (2014).
57. D. Kalaj, *Radical extension of a bi-Lipschitz parametrization of a starlike Jordan curve*, *Complex Var. Elliptic Equ.* 59, No. 6, 809-825 (2014).
58. D. Kalaj, *On harmonic functions on surface with positive Gauss Curvature and the Schwarz lemma*, *Rocky Mt. J. Math.* 44, No. 5, 1583-1593 (2014).
59. D. Kalaj, Ken-ichi Sakai, *Quasiconformal harmonic mappings onto a convex domain revisited*, *Albanian Journal of Mathematics*, Vol 7, No 2 (2013): September 2013.
60. D. Kalaj, *On quasiconformal harmonic maps between surfaces*, *International Math. Research Notices* 2015, No. 2, 355-380 (2015).
61. D. Kalaj, *On J. C. C. Nitsche's type inequality for hyperbolic space  $\mathbb{H}^n$* , *Potential Anal.* 41, No. 3, 931-943 (2014).
62. D. Kalaj, Djordje Vučković, *Solution operators of inhomogeneous Dirichlet problems in the unit ball*, *To appear in Proceeding of American Mathematical Society* (2015).
63. David Kalaj, *Quasiconformal harmonic mappings between surfaces*, *To appear in Pacific Journal of Mathematics* (2015).
64. David Kalaj, Djordje Vučković, *Norm of the Bergman projection*, *To appear in Journal of operator theory* (2015).



65. David Kalaj, *Lindelöf theorem for harmonic mappings*, to appear in *Journal of the Mathematical Society of Japan* (2013).
66. David Kalaj, *On Nitsche mappings of the unit circle onto a convex curve and their extension*, to appear in *Filomat* (2015).
67. Ljubomir B. Čirić, Samuel Krushkal, Qamrul Hasan Ansari, David Kalaj, and Vesna Manojlović, *Nonlinear Analysis and Geometric Function Theory - Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014 (2014), Article ID 655957, 1 page.

#### RADOVINA RECENZIJU

68. D. Kalaj, *Deformations of Annuli on Riemann surfaces with Smallest Mean Distortion*, submitted on May 2010, arXiv:1005.3269.
69. D. Kalaj, *On J. C. C. Nitsche's type inequality for annuli on Riemann surfaces*, arXiv:1204.5419.
70. D. Kalaj, M. Vuorinen, G. Wang, *On quasiconformality*, arXiv: 1212.0721.
71. D. Kalaj, E. Saksman, *Quasiconformal mappings with controlled Laplacian*, arXiv:1412.8425.
72. D. Kalaj, *Muckenhoupt weights and Lindelöf theorem for harmonic mappings*, arXiv:1410.5478, Revision sent in *Advances in Mathematics*.
73. D. Kalaj, *Invertible harmonic mappings of unit disk onto Dini smooth Jordan domains*,

#### RADOVINA KONFERENCIJAMA

74. D. Kalaj, *On the first and on the radial derivative of harmonic function defined on the unit ball*, Proceedings of the Workshop devoted to 25 anniversary of the Faculty of Natural Sciences and mathematics, University of Montenegro, September 2005, p: 88-97.
75. D. Kalaj, *On harmonic diffeomorphisms and Q.C. harmonic functions*, Proceedings of the 10<sup>th</sup> congress of Yugoslav mathematicians, Belgrade, 21-24.01. 2001, 231-234.

#### KONFERENCIJE I SEMINARI

76. D. Kalaj, *Harmonic mappings between convex domains*, X Congress of Yugoslav Mathematicians, Beograd, Yugoslavia, January 2001.
77. D. Kalaj, *On Quasiconformal harmonic function of the unit disk onto a convex domain*, Roni-Tinn Seminar, 2001, Brasov, Rumunija.
78. D. Kalaj, *5 International symposium of mathematical analysis and its applications*, MAA5, Niska Banja, October 2-6, 2002.
79. D. Kalaj, *On the Nitsche's conjecture for harmonic mappings in  $\mathbb{R}^2$  and in  $\mathbb{R}^3$* , I.H.A.M.S. Meeting, Courant Institute New York, April 12-13, 2003, page 45-48.
80. D. Kalaj, M. Perović, *Boundary correspondence under harmonic quasiconformal mapping of the halfplane*, The book of abstract of XI Congress of Mathematicians, Belgrade, page 22, Petrovac, October, 2004.
81. D. Kalaj, *On the first and on the radial derivative of harmonic function defined on the unit ball*, Proceedings of the Workshop devoted to 25 anniversary of the Faculty of Natural Sciences and mathematics, University of Montenegro, September 2005.

82. D. Kalaj: On the univalent solution of PDE  $\Delta u = f$  between spherical annuli. The book of abstracts of Harmonic Analysis and partial Differential Equations, June 27-July 1, 2005, Kall, Germany.
83. D. Kalaj: Harmonic and quasiconformal maps, Extremal Problems in Complex and Real Analysis, Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia May 22-26, 2007. The book of abstracts.
84. D. Kalaj: Quasiconformal harmonic maps, Seminar: Mathematical Colloquium, Beograd 11. 05. 2007. [http://www.mf.sanu.ac.yu/colloquium/mathcoll\\_prog\\_ranus/mathcoll.may2007.htm](http://www.mf.sanu.ac.yu/colloquium/mathcol_prog_ranus/mathcoll.may2007.htm), Predavanje po pozivu.
85. D. Kalaj: On the univalent solution of PDE  $\Delta u = f$  between spherical annuli, Seminar: Differential Equations in Theory and Applications 06.06. 2007 [www.math.nyu.ac/seminars/delta](http://www.math.nyu.ac/seminars/delta), Predavanje po pozivu.
86. D. Kalaj: On quasiconformal harmonic mappings, Congress in memory of Adrien Douady, Paris, France May, 2008, Poster.
87. D. Kalaj: Boundary correspondence under q.c. harmonic mappings between Jordan domains, Mini conference on quasiconformal harmonic mappings, Beograd, Srbija, 2009, septembar, Predavanje po pozivu.
88. D. Kalaj: On quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane, Helsinki seminar on Analysis, October, 2010, predavanje po pozivu.
89. D. Kalaj: On quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane, Turku seminar on Analysis, October, 2010, predavanje po pozivu.
90. D. Kalaj: Optimization of annuli under smallest mean distortion on Riemann surfaces, Workshop on Quasiconformal mappings and Mappings of finite distortion, Prague, September 2011, Predavanje od 30 minuta.
91. D. Kalaj: Deformation of annuli under smallest mean distortion on Riemann surfaces and generalization of J. C. C. Nitsche Conjecture, Workshop on Complex Analysis, Bergamo, February 2012, predavanje po pozivu.
92. D. Kalaj: Deformations of Annuli on Riemann surfaces and the generalization of Nitsche conjecture and Quasiconformal harmonic mappings, Predavanje po pozivu, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, Romania, Iasi, 2012, <http://imar.ro/RoInSem2012/conf.php>, Romanian English seminar.
93. D. Kalaj: Deformations of Annuli on Riemann surfaces and the generalization of Nitsche conjecture, The 6th European Congress of Mathematics, 2012, Poster.
94. David Kalaj: Cauchy transform and Poisson equation, Turku analysis seminar, Finland (4.10. 2012) <http://users.utu.fi/dpekl/seminar/index.html>
95. David Kalaj: Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces, "Conference on Riemann surfaces and Kleinian groups", held in Osaka University, Japan, from January 12 to January 14, 2013.
96. David Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between surfaces, Conference of Geometric function theory, October 2013, Beograd.
97. David Kalaj, Muckenhoupt weights and Lindelöf theorem for harmonic mappings, March 2014, Helsinki seminar of analysis, Helsinki 2014.
98. David Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between surfaces. March 2014, Helsinki seminar of analysis, Helsinki 2014.
99. David Kalaj, Muckenhoupt weights and Lindelöf theorem for harmonic mappings, ICN August, 2014, Seoul, Korea, Short communication.
100. David Kalaj, Harmonic and quasiconformal mappings and generalizations, Seminar of Mathematical Science Huqiao University, P.R.China, January 26, 2015.
101. David Kalaj, On quasi-inversions, School of Mathematical Science Huqiao University, P.R.China, January 27, 2015.
102. David Kalaj, Energy-minimal diffeomorphisms between doubly connected Riemann surfaces, School of Mathematical Science Huqiao University, P.R.China, January 27,

103. David Kalaj, Poisson equation and Cauchy transform; School of Mathematical Science Huaqiao University, P.R.China, January 25, 2015.
104. David Kalaj, Quasiconformal harmonic mappings between surfaces; School of Mathematical Science Huaqiao University, P.R.China, January 28, 2015.
105. David Kalaj, "Norm of the Bergman projection"; School of Mathematical Science Huaqiao University, P.R.China, January 25, 2015.
106. David Kalaj, Schwarz lemma for harmonic functions, School of Mathematical Science Huaqiao University, P.R.China, January 27, 2015.
107. David Kalaj, "The J. C. C. Nitsche conjecture and generalization" School of Mathematical Science Huaqiao University, P.R.China, January 25, 2015.

#### KNJIJE

1. D. Kalaj: Zbirka zadataka iz kompleksne analize, Univerzitet Crne Gore, 2006, 219 str.
2. M. Jecimović, D. Kalaj: Uvod u kompleksnu analizu, Univerzitet Crne Gore, 2009, 347 str.

#### PREVODI

Prevod i adaptacija sljedećih udžbenika iz matematike sa srpskog (crnogorskog) na njemački jezik u izdanju izdavačke kuće "Zavod za udžbenike i nastavna sredstva" u periodu 2008-2010.

- 1) Matematika IV (četvrti razred osnovne škole)
- 2) Matematika V (peti razred osnovne škole)
- 3) Matematika VII (osmi razred osnovne škole)
- 4) Matematika IX (deveti razred osnovne škole)
- 5) Matematika II (drugi razred srednje škole)
- 6) Matematika III (treći razred srednje škole)
- 7) Algoritmi i programiranje (treći i četvrti razred srednje škole).

Citati: 550 citata (<http://scholar.google.com>).